

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ АКАДЕМІКА
СТЕПАНА ДЕМ'ЯНЧУКА

Р.М.Літнарівч

БІОФІЗИКА

Медична фізика , теоретична і прикладна фізика
Збірник задач



Рівне, 2011

Літнарівч Р.М. Біофізика. Медична фізика, теоретична і прикладна фізика. Збірник задач. МЕНУ, Рівне, 2011, 205- 39 с.

Рецензенти:

В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Є.С.Парняков, доктор технічних наук, професор

В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Підбір завдань визначався виходячи з того, щоб сприяти більш глибокому розумінню основного матеріалу, що міститься в лекціях. Для деяких завдань представлені докладні рішення, інші пропонуються в якості самостійних вправ.

Ключові слова-біофізика, складні системи, біофізика клітини, молекулярна біофізика.

Подбор заданий определялся исходя из того, чтобы способствовать более глубокому пониманию основного материала, который содержится в лекциях. Для некоторых заданий представлены подробные решения, другие предлагаются в качестве самостоятельных упражнений.

Ключевые слова-биофизика, сложные системы, биофизика клетки, молекулярная биофизика.

The selection of tasks was determined coming from that, instrumental in more deep understanding of basic material which is contained in lectures. For some tasks the detailed decisions are presented, other are offered in quality independent exercises.

Keywords-biophysics, difficult systems, biophysics of cage, molecular biophysics.

© Р.М.Літнарівч

Зміст	Стор.
<i>Передмова</i>	4
Лабораторна робота 1. Встановлення прискорення вільного падіння.....	5
1. Задачі з біофізики складних систем	
Практична 1. Дослідження популяції бактерій.....	9
Практична 2. Дослідження бактеріальних клітин.....	10
II. Задачі з біофізики клітини	
Практична 3. Пасивний транспорт іонів.....	11
Практична 4. Дослідження товщини ліпідної частини мембрани.....	12
Практична 5. Визначення діелектричної проникності комплексона.....	13
III. Задачі з молекулярної біофізики	
Практична 6.....	14
IV Рішення	15
V Додаток	35
Літературні джерела	38

Передмова

У даному збірнику представлені вибрані завдання по трьох основних розділах біофізики: біофізики складних систем, біофізики клітини і молекулярної біофізики. Наведені завдання є типовими, тобто аналогічні тим, які пропонуються студентам для вирішення на практичних заняттях. Підбір завдань визначався виходячи з того, щоб сприяти більш глибокому розумінню основного матеріалу, що міститься в лекціях. Для деяких завдань представлені докладні рішення, інші пропонуються в якості самостійних вправ.

Лабораторна робота № 1

Тема: Встановлення прискорення вільного падіння.

Ціль роботи: Обчислити значення прискорення вільного падіння в залежності від широти розташування міст, приведених в таблиці.

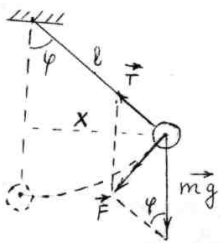
Мета роботи: Набуття навичок знаходження прискорення вільного падіння в будь-якій точці Земної кулі.

Прилади: Математичний маятник, рулетка, секундомір, калькулятор, лекція №1.

Прискорення вільного падіння в будь-якій точці Земної кулі можна визначити за допомогою математичного маятника.

Маятником називають тіло, що коливається під дією сили тяжіння.

Математичним маятником називають матеріальну точку, підвішену на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння. До математичного маятника за своїми властивостям найбільше подібна система, що складається з нерозтяжної легкої нитки, до одного з кінців якої підвішено металеву кульку. Маса кульки набагато перевищує масу нитки, а довжина нитки набагато перевищує розміри кульки.



Нехай маса кульки m , а довжина нитки l (рис. 1.1). Коли система перебуває в стані спокою, то сила тяжіння зрівноважується силою натягу нитки T . З відхиленням рівноваги виникає повертаюча сила F , яка є рівнодією сили тяжіння та натягу нитки: $F = mg \sin \varphi$, (1.1) де g – прискорення вільного падіння. Для малих кутів відхилення можна записати, що

$$\sin \varphi = \frac{x}{l} \approx \varphi \quad (1.2)$$

Рис.1.1. Математичний маятник ! де x – зміщення маятника від положення рівноваги. Тоді вираз для повертаючої сили набуває вигляду:

$$F = -\frac{mg}{l} x = -kx, \quad (1.3)$$

де $k = \frac{mg}{l}$ (1.4) – коефіцієнт пропорційності.

Знак «мінус» показує, що повертаюча сила протилежна до напрямку зміщення. Отже, при малих кутах відхилення маятника повертаюча сила пропорційна зміщенню. Ця сила за своєю природою не є пружною, тому її називають **квазіпружною**. Коливання системи під дією квазіпружної сили є **гармонічними**.

Рівняння руху математичного маятника матиме вигляд:

$$ma = F, \quad (1.5), \quad \frac{md^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{L}x \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0, \quad (1.6)$$

Де $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ (1.7) – циклічна частота власних коливань математичного маятника.)

Так як $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (1.8), то період коливання математичного маятника дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (1.9)$$

Таким чином, період коливання математичного маятника не залежить від амплітуди коливань, маси маятника, а визначається його довжиною і прискоренням вільного падіння в даному місці Землі.

$$T^2 = 4\pi^2 L / g; \quad g = 4\pi^2 L / T^2 \quad (1.10)$$

Завдання та обробка результатів вимірювань.

1. Встановити певну довжину l математичного маятника і виміряти її рулеткою.
2. Відхилити маятник від положення рівноваги на 3-4 градуси і визначити за допомогою секундоміру час t 30-40 повних коливань.

Період коливань обчислити за формулою $T = \frac{t}{N}$, (1.10), де N –

кількість коливань маятника. Дані занести до таблиці.

3. Вивести робочу формулу та обчислити прискорення вільного падіння.

4. Розрахувати відносну випадкову, систематичну і повну абсолютну похибку. Проаналізувати одержані результати. Зробити висновки.

5. Провести всі розрахунки.

Таблиця 1.1 Встановлення прискорення вільного падіння в місці розташування лабораторії.

№ виміру	ℓ , м	t, с	N	T, с
1.	0,220	28	30	0,9333
2.	0,220	33	35	0,9428
3.	0,220	38	40	0,950
Серед				$\bar{g} = 9,789$

$g, \frac{M}{c^2}$	$\Delta g, \frac{M}{c^2}$	Δg^2	$\left[\frac{\Delta g}{g} \right]$ Сис., %	$\left[\frac{\Delta g}{g} \right]$ повн., %
9,971	+0,182	0,033124	9,789 - 9,80	1,778% вип. + (-0,112)% сис. = 1,890% повн.
9,771	-0,018	0,000324	9,80	
9,624	-0,165	0,027225	= -0,01 9,80	
$\bar{g} = 9,789$	$\Sigma -0,001$	$\Sigma 0,060673$ i	0,00112 x 100 % -0,112%	

$$m_g = \sqrt{\frac{\sum \Delta g^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{6,0673 \cdot 10^{-2}}{2}} = 0,174 \frac{M}{c^2};$$

$$\left(\frac{m_g}{g} \cdot 100 \right) = \frac{0,174}{9,789} \cdot 100 = 1,778\%.$$

Контрольні запитання.

1. Які коливання називаються гармонічними?
2. Що називається маятником? Навести приклади маятників?
3. Що є математичним маятником?
4. Від яких величин залежить період коливань математичного маятника?
5. Чому саме при малих кутах відхилення коливань математичного маятника вони будуть гармонічними?

6. Як зміниться прискорення вільного падіння зі зміною широти місцевості?

Висновки: 1.Кращий результат досягається тоді, коли довжину маятника приймаємо $\ell = 220$ мм, тобто до кінця шестигранної гайки. 2.Середня квадратична похибка визначення прискорення вільного падіння складає $0,174 \frac{M}{c^2}$, що становить 1,8%, а систематична похибка дорівнює - 0,112%, що в сумі складає 1,9%.

Таблиця 1.2 Встановлення прискорення вільного падіння в залежності від широти місця спостереження і порівняння зі схиленням магнітної стрілки. (на 1.01.1943 р.)

№	Назва пункту	Широта	Схилення	Зміна схилення за рік	Прискорення вільного падіння
1.	Алма-Ата	43° 16'	+ 6,1°	- 2,2'	
2.	Архангельськ	64° 32'	+ 12,1°	+ 6,0'	
3.	Астрахань	46° 21'	+ 7,6°	+ 3,5'	
4.	Ашхабад	37° 57'	+ 5,6°	- 0,1'	
5.	Благовіщенськ	50° 15'	- 11,9°	- 5,0'	
6.	Владивосток	43° 7'	- 9,1°	- 3,4'	
7.	Дніпропетровськ	48° 26'	+ 5,3°	+ 7,5'	
8.	Іркутськ	52° 16'	- 0,5°	- 4,0'	
9.	Київ	50° 27'	+ 4,0°	+ 8,0'	
10.	Санкт-Петербург	59° 56'	+ 5,4°	+ 8,0'	
11.	Москва	55° 45'	+ 7,5°	+ 5,8'	
12.	Новосибірськ	55° 1'	+ 10,8°	- 3,7'	
13.	Одеса	46° 26'	+ 0,9°	+ 8,0'	
14.	Орджікідзе	43° 3'	+ 5,4°	+ 4,3'	
15.	Петропавлівськ-на-Камчатці	53° 0'	- 4,8°	- 5,5'	
16.	Свердловськ	56° 50'	+ 11,3°	+ 0,2'	
17.	Тбілісі	41° 41'	+ 5,5°	+ 4,0'	
18.	Челябінськ	55° 9'	+ 13,1°	+ 0,1'	
19.	Якутськ	62° 1'	- 15,7°	- 6,9'	

Робоча формула для розрахунку прискорення вільного падіння g

$$g = \sqrt{\gamma^2 \frac{M^2}{R^4} - \omega^4 R^2 \cos^2 \varphi - 2\gamma \frac{M}{R} \omega^2 \cos \varphi}; \quad (1.11)$$

де гравітаційна постійна $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{M^2}{кг \cdot c^2}$

маса Землі $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ кг;

екваторіальний радіус Землі $R = 6378$ км;

кутова швидкість обертання Землі $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$;

φ - широта пункту спостережень.

I. Задачі з біофізики складних систем

Практична 1. Дослідження популяції бактерій

1.1 Вирощена популяція бактерій чисельністю 10^6 . Раптово починається загибель бактерій, причому за першу хвилину число загиблих бактерій склало 10^4 . Визначити, за який час загине вся популяція, якщо відомо, що швидкість загибелі пропорційна чисельності популяції.

1.2 Популяція бактерій росте зі швидкістю, пропорційною її чисельності. Визначити, через який час чисельність популяції досягне величини 10^8 якщо за першу годину число бактерій зросло з 1 до 1000. Який інтервал між послідовними поділами?

1.3 Чисельність культури бактерій при необмеженому харчуванні за 5 годин збільшилася від $2 \cdot 10^6$ до $3 \cdot 10^8$ клітин. Який інтервал між послідовними поділами, якщо смертність відсутня?

1.4 Популяція бактерій зростає в умовах обмеженого харчування. Рівноважна щільність популяції становить $5 \cdot 10^8$ клітин на 1 мл. При малій щільності популяція подвоюється за 40 хв. Яка буде щільність популяції через 2 години, якщо початкова щільність дорівнює: (а) 10^8 клітин на 1 мл; (б) 10^9 клітин на 1 мл?

1.5 Час (у хвилинах) між двома послідовними поділами в культурі бактерій дорівнює $40 + 10^{-7}x$, де x - число клітин на 1 мл. Скільки часу буде потрібно для того, щоб щільність збільшилася від 10^8 до 10^9 клітин на 1 мл?

1.6 Популяція бактерій зростає в умовах обмеженого харчування. Чи можна зупинити подальше зростання

популяції бактерій, почавши з деякого моменту часу знищувати їх з постійною швидкістю? Визначити мінімальну швидкість, при якій це можливо, якщо на початковий момент часу чисельність популяції становила 2500 бактерій. Відомо: при надлишку харчування за годину популяція бактерій збільшується на 80%. Рівноважний число бактерій - 15000.

1.7 Популяція бактерій зростає в умовах обмеженого харчування. Якої максимальної величини може досягти чисельність популяції, якщо починаючи з деякого моменту часу бактерії знищують з постійною швидкістю 500 бактерій / год? Визначити мінімальну чисельність популяції, при якій можливо досягти цієї величини. Відомо: при надлишку харчування за годину популяція бактерій збільшується на 50%, рівноважний число бактерій при цьому - 10000.

1.8 Популяція бактерій зростає в умовах обмеженого харчування. У деякий момент часу бактерії почали гинути з постійною швидкістю. Чи можна зупинити загибель популяції? Визначити мінімальну чисельність популяції, при якій це можливо, якщо швидкість загибелі становить 600 бактерій / год. Відомо: при надлишку харчування за годину популяція бактерій збільшується на 80%. Рівноважний число бактерій - 15000.

1.9 Бактеріальні клітини розмножуються в умовах обмеженого харчування. У деякий момент часу клітини почали гинути з постійною швидкістю. Чи може бути продовжений подальше зростання популяції? Визначити максимальну швидкість загибелі, при якій зростання ще можливий, якщо на момент початку загибелі чисельність популяції становила 1500 бактерій. Відомо: при надлишку харчування за годину популяція бактерій збільшується на 50%. Рівноважний число бактеріальних клітин - 10000.

1.10 Популяція кроликів розмножується зі швидкістю, квадратичної їх чисельності, і гине за лінійним законом. Чи

буде знищена популяція, якщо зграя вовків знищує кроликів з постійною швидкістю?

Практична 2. Дослідження бактеріальних клітин

1.11 Бактеріальні клітини розмножуються з швидкістю, пропорційною їх чисельності, і має місце притік клітин ззовні з постійною швидкістю. Чи буде знищена популяція, якщо з деякого моменту часу починається їх загибель за квадратичним законом?

1.12. Має місце співіснування двох клітинних популяцій в режимі хижак-жертва. Яка буде динаміка розвитку популяцій за умов тісноти і конкуренції всередині кожної популяції? Чи може виникнути коливальний характер динаміки популяцій? Вважати, що обидві популяції мають однакові динамічні характеристики.

1.13 Має місце співіснування двох клітинних популяцій в режимі хижак-жертва. Яка буде динаміка розвитку популяцій в умовах тісноти і конкуренції всередині однієї з популяцій? Чи може виникнути коливальний характер динаміки популяцій?

1.14 Має місце симбіоз двох клітинних популяцій. Яка буде динаміка розвитку популяцій в умовах тісноти і конкуренції всередині кожної популяції? Чи може виникнути коливальний характер динаміки популяцій? Вважати, що обидві популяції мають однакові динамічні характеристики.

1.15 Має місце симбіоз двох клітинних популяцій. Яка буде динаміка розвитку популяцій в умовах тісноти і конкуренції всередині однієї з популяцій? Чи може виникнути коливальний характер динаміки популяцій?

1.16. Має місце конкуренція двох клітинних популяцій. Яка буде динаміка розвитку популяцій в умовах тісноти і конкуренції всередині кожної популяції? Чи може виникнути коливальний характер динаміки популяцій? Вважати, що обидві популяції мають однакові динамічні характеристики.

1.17. Має місце конкуренція двох клітинних популяцій. Яка буде динаміка розвитку популяцій в умовах тісноти і конкуренції всередині однієї з популяцій? Чи може виникнути коливальний характер динаміки популяцій?

II. Завдання з біофізики клітини

Практична 3. Пасивний транспорт іонів

2.1 Концентрація іонів (ммоль / л) між двома сторонами клітинної мембрани в м'язі жаби має таке значення: Na (120 / 9,2), K (2,5 / 140), Cl (120 / 3-4), де цифри відносяться до зовнішньої / внутрішньої боці мембрани, відповідно. Визначити різницю потенціалів на мембрані в разі пасивного транспорту кожного типу іонів. Дати порівняльний аналіз за умови, що експериментальна величина становить -90мВ.

2.2 Концентрація іонів (ммоль / л) між двома сторонами клітинної мембрани в аксоні кальмара має таке значення: Na (460 / 50), K (10 / 400), Cl (540 / 40-100), Ca (10 / 0,4), Mg (53 / 10), де цифри відносяться до зовнішньої / внутрішньої боці мембрани, відповідно. Визначити різницю потенціалів на мембрані в разі пасивного транспорту кожного типу іонів. Дати порівняльний аналіз за умови, що експериментальна величина становить -60мВ.

2.3. Концентрація іонів (ммоль / л) на зовнішній стороні клітинної мембрани в м'язі жаби має таке значення: Na = 125, K = 2,5, Cl = 120. Визначити концентрацію іонів (у разі пасивного транспорту) на внутрішній стороні клітинної мембрани, якщо різниця потенціалів на мембрані становить -94мВ.

2.4 Концентрація іонів (ммоль / л) на внутрішній стороні клітинної мембрани в аксоні кальмара має таке значення: Na = 70, K = 360, Cl = 160, Ca = 0,4, Mg = 10. Визначити концентрацію іонів (у разі пасивного транспорту) на

зовнішній стороні клітинної мембрани, якщо різниця потенціалів на мембрані становить-60мВ.

Практична 4. Дослідження товщини ліпідної частини мембрани

2.5 Визначити товщину ліпідної частини мембрани якщо відомо, що питома електроємність мембрани $\epsilon_{\text{спит}} \sim 0,5 \times 10^{-2} \text{ Ф/м}^2$.

2.6 Яка кількість іонів має вийти з клітки, щоб створити різницю потенціалів-90мВ? Вважати, що радіус клітини $r = 10 \text{ мкм}$, питома електроємність мембрани $\epsilon_{\text{спит}} = 10^{-2} \text{ Ф/м}^2$.

2.7 Використовуючи формулу Борна, визначити витрати енергії (на 1 моль), необхідні для проникнення іона в ліпідний шар мембрани. Вважати: радіус іона $a = 0,1 \text{ нм}$, діелектрична проникність води $\epsilon_{\text{в}} = 81$, діелектрична проникність ліпідного шару $\epsilon_{\text{л}} = 2$.

2.8. Визначити витрати енергії (на 1 моль), необхідні для проникнення іонофору в ліпідний шар мембрани. Вважати: радіус іона $a = 0,1 \text{ нм}$, радіус переносника $b = 1 \text{ нм}$, діелектрична проникність внутрішньої сфери комплексона $\epsilon_{\text{к}} = 60$, діелектрична проникність ліпідного шару $\epsilon_{\text{л}} = 2$.

2.9 Визначити витрати енергії (на 1 моль), необхідні для проникнення іона в ліпідний шар мембрани через пору. Вважати: радіус іона $a = 0,1 \text{ нм}$, діаметр пори $b = 1 \text{ нм}$, діелектрична проникність пори $\epsilon_{\text{п}} = 80$, діелектрична проникність ліпідного шару $\epsilon_{\text{л}} = 2$.

2.10 Використовуючи формулу Борна, визначити діелектричну проникність ліпідного шару ($\epsilon_{\text{л}}$), якщо витрати енергії, необхідні для проникнення іона в ліпідний шар мембрани, становлять 280 кДж / моль . Вважати: радіус іона $a = 0,1 \text{ нм}$, діелектрична проникність води $\epsilon_{\text{л}} = 81$.

Практична 5. Визначення діелектричної проникності комплексона

2.11 Визначити діелектричну проникність внутрішньої сфери комплексона, якщо витрати енергії, необхідні для

проникнення іонофори в ліпідний шар мембрани, становлять 20 кДж / моль . Вважати: радіус іона $a = 0,1 \text{ нм}$, радіус переносника $b = 1 \text{ нм}$, діелектрична проникність ліпідного шару $\epsilon_{\text{л}} = 2$.

2.12 Визначити діаметр пори при проникненні іона в ліпідний шар мембрани, якщо витрати енергії, необхідні для проникнення через пору становлять 50 кДж / моль . Вважати: радіус іона $a = 0,1 \text{ нм}$, діелектрична проникність пори $\epsilon_{\text{п}} = 80$, діелектрична проникність ліпідного шару $\epsilon_{\text{л}} = 2$.

2.13. Визначити характер стаціонарного режиму при рівномірному ковзанні ниток в міофібрилі згідно моделі Дещеревського. Намалювати залежності $n(t)$, $m(t)$, де n (m) є число тягнучих (гальмуючих) містків, відповідно.

2.14 Визначити зовнішнє навантаження, при якому м'яз здійснює максимальну роботу (оптимальний режим) при скороченні.

2.15 Визначити параметри елементарного циклу м'язового скорочення: f - силу містка, L - довжину зони, в якій місток розвиває тягнучу силу, t - час, якщо відомо, що максимальна напруга литкового м'яза жаби складає $P_0 = 30 \text{ Н/см}^2$, максимальна кількість містків у м'язовому шарі з поперечним перетином 1 см^2 є $n_0 = 10^{13}$, енергія гідролізу однієї молекули АТФ $\epsilon \sim 3 \times 10^{-20} \text{ Дж}$, максимальна швидкість укорочення $v_m = 1, \times 10^{-6} \text{ м / с}$.

2.16 Розрахувати струм, що впадає в аксон кальмара при формуванні нервового імпульсу. Вважати, що діаметр аксона кальмара дорівнює 30 мкм , товщина мембрани аксона становить 10 нм , питомий опір аксоплазми дорівнює 50 Ом см , мембрани - $5 \times 10^3 \text{ Ом см}$, потенціал дії дорівнює 40 мВ .

III. Завдання з молекулярної біофізики

Практична 6.

3.1 Визначити мінімальну можливу відстань між нековалентно пов'язаними парами атомів і молекул, а

також енергію в точці мінімуму. Параметри потенціалу Ленарда-Джонса наведені в таблиці 1 (див. додаток).

3.2 Розрахуємо енергії всіх можливих видів слабких взаємодій між різними типами атомів і молекул, фізичні характеристики яких наведені в таблицях 2 і 3 (див. додаток).

3.3 Як зміниться обсяг білка, що представляє собою α -спіраль довжиною 45 нм і діаметром 1,1 нм, після його повної денатурації? Середню довжину статистичного сегмента прийняти рівною 5 нм.

3.4 Середня довжина молекули ДНК, що входить до складу однієї хромосоми людини становить 4,3 см. Уявімо, що ДНК - статистичний клубок. Визначити характерний обсяг такого клубка і порівняти його з розміром клітини. Так чому ж молекули ДНК щільно упаковані в хромосомах?

3.5 Розрахувати кількість інформації, закодованої послідовністю n нуклеотидів у ланцюгу ДНК і в первинній структурі білка, що складається з m амінокислот. Зробити оцінку при $n = 600$ і $m = 200$.

3.6 У тілі людини представлено близько 10^{13} клітин. Вважаємо, що всі вони унікальні (не можна переставляти). Визначити кількість інформації, необхідної для побудови організму, і відповідну зміну ентропії.

IV Рішення

1.1 Запишемо динамічне рівняння для зміни чисельності популяції N у вигляді

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N .$$

Рішення очевидно

$$N = N(0) \exp(-\lambda t) ,$$

де $N(0)$ є чисельність популяції в початковий момент часу. Перш за все, потрібно знайти значення λ . Маємо:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{N(0)}{N} .$$

Виходячи з умови задачі, $\lambda = \ln \frac{10^6}{990000} = 0.01$. Час загибелі

є

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N(0)}{N} .$$

Вважаючи нижньою межею популяції значення $N = 1$, остаточно отримуємо

$$t = 600 \times \ln 10 \sim 1382 \text{ хв} \sim 23 \text{ год} .$$

1.3 Зміна чисельності популяції в умовах необмеженого харчування описується рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N .$$

Рішення очевидно

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N(0)} ,$$

звідки час подвоєння $T = \ln 2 / \lambda$. У свою чергу,

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{N}{N(0)} .$$

Виходячи з умови задачі, знаходимо $\lambda = (1 / 5) \ln 150$, і $T = 5 \ln 2 / \ln 150 = 0,692 \text{ год} = 41,5 \text{ хв}$.

1.4 Запишемо рівняння динаміки популяції в умовах обмеженого харчування (відоме як закон Ферхюльста або логістичне рівняння)

$$\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{N}{N_{\text{рав}}} \right).$$

Тут k - константа, і $N_{\text{рав}}$ - рівноважна чисельність популяції. Для вирішення завдання необхідно проінтегрувати дане рівняння методом поділу змінних. Рішення має вигляд:

$$N(t) = \frac{N_0 \exp(kt)}{1 + \frac{N_0}{N_{\text{рав}}} (\exp(kt) - 1)}.$$

При $t = 0$ чисельність дорівнює початковому значенням N_0 , тоді як при $t \rightarrow \infty$ $N(t) \rightarrow N_{\text{рав}}$. Для знаходження k скористаємося додатковою умовою задачі. А саме, при малій щільності зміна популяції визначається лінійним законом $\Delta N / N = k \Delta t$. У разі подвоєння маємо $\Delta N = N$, так що $k = 1 / T$, де T - час між послідовними поділами. Таким чином, остаточно отримуємо

$$N(t) = \frac{N_0 \exp(t/T)}{1 + \frac{N_0}{N_{\text{рав}}} (\exp(t/T) - 1)}.$$

Залишилося підставити конкретні значення. У випадку (а) отримуємо $N(2) = 4,17 \times 10^8$ клітин на 1 мл, у випадку (б) $N(2) = 5,13 \times 10^8$ клітин на 1 мл.

1.5 аналогічних попередній задачі, отримуємо $k = 1 / T$, де T - час між послідовними поділами. Таким чином, згідно з умовою завдання

$$\frac{1}{k} = 40 + 10^{-7} x.$$

Підставляємо в динамічне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx = \frac{x}{40 + 10^{-7} x}.$$

Після інтегрування маємо

$$40 \ln \frac{x_2}{x_1} + 10^{-7} (x_2 - x_1) = \Delta t.$$

Остаточно отримуємо $\Delta t = 40 \ln 10 + 90 = 182,1$ хв.

1.6. Запишемо рівняння динаміки популяції (закон Ферхюльста) з урахуванням постійного відтоку

$$\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{N}{N_{\text{рав}}} \right) - V_0 = f(N).$$

Стационарні точки визначаються з рівності нулю правій частині рівняння. Рішення має вигляд

$$N_{1,2} = \frac{N_{\text{рав}}}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4V_0}{kN_{\text{рав}}}} \right).$$

Точка біфуркації визначена умовами $4V_0^* = kN_{\text{рав}}$. При $V_0 > V_0^*$ немає стационарних точок. При $V_0 < V_0^*$ є дві стационарні точки. При цьому точка N_1 стійка, а N_2 - нестійка, оскільки похідна

$$\frac{df}{dN}|_{N_1, N_2} = \mp \sqrt{1 - \frac{4V_0}{kN_{\text{пас}}}}$$

Надлишок живлення має на увазі $N_{\text{рівн}} \rightarrow \infty$. У цьому випадку просте інтегрування дає $N = N(0) \exp(kt)$. Знаходимо к. $k = (1/t) \ln(N/N(0))$. Виходячи з умови задачі, отримуємо $k = \ln 1,8 = 0.59 \text{ год}^{-1}$, $N_{\text{рівн}} = 15000$. Зростання популяції буде зупинений тільки в тому випадку, якщо її чисельність опиниться в області $N(0) < N_2$, де $N(0) = 2500$. Таким чином, слід вирішити рівняння

$$\frac{N_{\text{пас}}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4V_0}{kN_{\text{пас}}}} \right) > N(0)$$

Рішення має наступний вигляд

$$V_0 > kN(0) \left(1 - \frac{N(0)}{N_{\text{пас}}} \right)$$

звідки легко отримати $V_0 > 1229 \text{ кл / год}$, або $V_0 \text{мін} = 1230 \text{ кл / год}$.

1.7 Запишемо рівняння динаміки популяції (закон

$$\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{N}{N_{\text{пас}}} \right) - V_0 = f(N)$$

Ферхюльста) з урахуванням постійного відтоку
Стационарні точки визначаються з рівності нулю правій частині рівняння. Рішення має вид

$$N_{1,2} = \frac{N_{\text{пас}}}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4V_0}{kN_{\text{пас}}}} \right)$$

Точка біфуркації визначена умовою $4V_0^* = kN_{\text{рівн}}$. При $V_0 > V_0^*$ немає стационарних точок. При $V_0 < V_0^*$ має дві стационарні точки. При цьому точка N_1 стійка, а N_2 - нестійка, оскільки похідна

$$\frac{df}{dN}|_{N_1, N_2} = \mp \sqrt{1 - \frac{4V_0}{kN_{\text{пас}}}}$$

Надлишок живлення має на увазі $N_{\text{рівн}} \rightarrow \infty$. У цьому випадку просте інтегрування дає $N = N(0) \exp(kt)$. Знаходимо к. $k = (1/t) \ln(N/N(0))$. Виходячи з умови задачі, отримуємо $k = \ln 1,5 = 0.4 \text{ год}^{-1}$, $N_{\text{рівн}} = 10000$, $V_0 = 500 \text{ кл / год}$. Маємо: $N_1 = 8500$, $N_2 = 1500$. Отже, при $N < N_2$ популяція загине, при $N > N_2$ виживе і її чисельність неминуче прийде до величини $N = N_1$.

1.10 Запишемо рівняння динаміки популяції з урахуванням постійного відтоку

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N^2 - \beta N - V_0 = f(N)$$

Стационарні точки визначаються з рівності нулю правій частині рівняння. Рішення має вид

$$N_{1,2} = \frac{\beta}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha V_0}{\beta^2}} \right)$$

Отже, є одна стаціонарна точка (негативні коріння не мають сенсу). Неважко переконатися, що стаціонарна точка нестійка. Таким чином, при $N > N_1$ продовжиться необмежене зростання популяції, а при $N < N_1$ популяція загине.

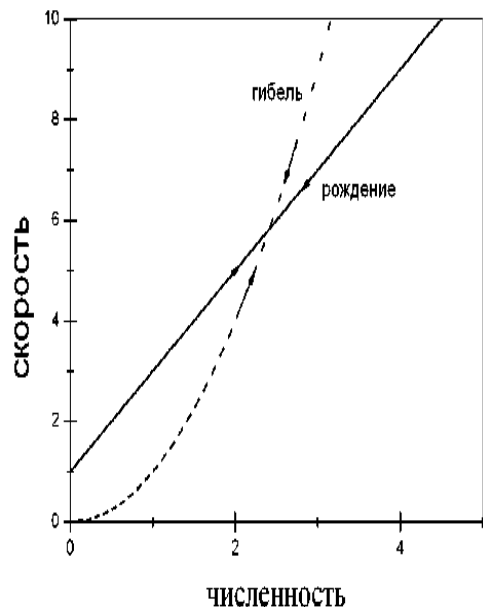
1.11 Немає, оскільки є стійка стаціонарна точка (рішення за допомогою графіка).

При вирішенні таких завдань використовуються позначення: $p = - (a + d)$, $q = ad - bc$, де

і значення похідних взяті в стаціонарній точці.

1.12 - 1.13. Розглянемо загальний випадок:

$$a = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y},$$



$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x - \beta_1 xy - \gamma_1 x^2 = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_2 xy - \alpha_2 y - \gamma_2 y^2 = Q(x, y).$$

Тут x позначає чисельність популяції жертв, y - хижаків. Стаціонарні точки визначаємо з умови $P(x, y) = Q(x, y) = 0$:

$$\bar{x} = \frac{\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_1}{\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2}, \quad \bar{y} = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2}.$$

Очевидно, $\alpha_1 \beta_2 > \alpha_2 \gamma_1$, інакше хижаки вимруть. Знаходимо p і q :

$$p = \frac{\alpha_1 \gamma_2 (\beta_2 + \gamma_1) + \alpha_2 \gamma_1 (\beta_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2}, \quad q = \frac{(\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_1)(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \gamma_1)}{\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2}$$

Аналізуємо для конкретних випадків:

1. Немає обмеження по харчуванню: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Маємо: $p = 0$, $q = \alpha_1 \alpha_2$, тобто є особлива точка типу центр.

2. Обмеження щодо харчування для однієї з популяцій:

(а) $\gamma_1 = 0$. Маємо: $p = \alpha_1 \gamma_2 / \beta_1$, $q = (\alpha_1 / \beta_1)(\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_1)$ тобто є особлива точка типу стійкий фокус (при $q > p^2/4$) або стійкий вузол (при $q < p^2/4$) залежно від співвідношення величин q і $p^2/4$.

(б) $\gamma_2 = 0$. Нагадаємо, що тут повинно виконуватися співвідношення $\alpha_1 \beta_2 > \alpha_2 \gamma_1$. Маємо: $p = \alpha_2 \gamma_1 / \beta_2$, $q = (\alpha_2 / \beta_2)(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \gamma_1) > 0$, тобто є особлива точка

типу стійкий фокус ($q > p^2/4$) або стійкий вузол ($q < p^2/4$) залежно від співвідношення величин q і $p^2/4$.

3. Обмеження щодо харчування для обох популяцій:

За умовою завдання 12: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$,

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. У цьому випадку

$$x = a(\gamma + \beta) / (\gamma^2 + \beta^2), \quad y = a(\beta - \gamma) / (\gamma^2 + \beta^2).$$

Маємо очевидну умову $\beta > \gamma$. Отримуємо,

$$p = 2\alpha\beta\gamma / (\gamma^2 + \beta^2), \quad q = a^2(\beta^2 - \gamma^2) / (\gamma^2 + \beta^2) > 0.$$

Перевіряємо співвідношення:

$$q - p^2/4 = \left(\frac{\alpha}{\gamma^2 + \beta^2}\right)^2 (\beta^4 - \beta^2\gamma^2 - \gamma^4).$$

Коливальний характер виникне тільки в разі особливої точки типу **стійкий фокус**, тобто при $q > p^2/4$.

Зазначимо, що ця умова реалізується, коли параметр швидкості росту популяції хижаків β перевищує (на деяку легко розраховувану величину) параметр γ , що характеризує спад популяції внаслідок обмеження по харчуванню.

1.14 - 1.15 Розглянемо загальний випадок:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \beta_1 xy - \gamma_1 x^2 = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha_2 y + \beta_2 xy - \gamma_2 y^2 = Q(x, y).$$

Стационарні точки визначаємо з умови $P(x, y) = Q(x, y) = 0$:

$$x = \frac{\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_1}{\gamma_1 \gamma_2 - \beta_1 \beta_2}, \quad y = \frac{\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \beta_2}{\gamma_1 \gamma_2 - \beta_1 \beta_2}.$$

Находим p и q :

$$p = \frac{\alpha_1 \gamma_2 (\gamma_1 - \beta_2) + \alpha_2 \gamma_1 (\beta_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2 - \beta_1 \beta_2}, \quad q = \frac{(\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_1)(\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \beta_2)}{\gamma_1 \gamma_2 - \beta_1 \beta_2}.$$

Очевидно, $\gamma_1 \gamma_2 > \beta_1 \beta_2$, інакше немає стаціонарної точки.

Аналізуємо для конкретних випадків:

1. Немає обмеження по харчуванню: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Немає стаціонарної точки. Маємо $p = 0$, $q = -\alpha_1 \alpha_2 < 0$, тобто є особлива точка типу **сідло**.

2. Обмеження щодо харчування для однієї з популяцій.

Немає стаціонарної точки.

3. Обмеження щодо харчування для обох популяцій:

За умовою завдання 10: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. У цьому випадку $x = a/(\gamma + \beta)$, $y = a/(\gamma + \beta)$. Отримуємо, $p = 2\alpha\gamma / (\gamma + \beta) > 0$, $q = a^2(\gamma - \beta) / (\gamma + \beta)$. Маємо: при $\gamma < \beta$ $q < 0$, тобто є особлива точка типу **сідло**. При $\gamma > \beta$ отримуємо $q > 0$ і, таким чином, необхідно оцінити значення $q - p^2/4$. Маємо: $q - p^2/4 = -a\beta / (\gamma + \beta)^2 < 0$, тобто є особлива точка типу **стійкий вузол**, і немає коливального характеру динаміки популяцій.

2.1 Для розрахунку різниці потенціалів використовуємо формулу Нернста:

$$\Delta\varphi = -\frac{RT}{zF} \ln \frac{C_{\text{вн.}}}{C_{\text{нар.}}},$$

де R - універсальна газова стала, F - стала Фарадея, T - температура, Z-валентність, C_{вн} і C_{зовн} - концентрації іонів всередині і зовні клітини, відповідно. Для іонів калію і натрію Z = 1, кальцію і магнію Z = 2, хлору Z = -1.

Отримуємо: $\Delta\varphi_{Na} = 66 мВ$, $\Delta\varphi_K = -104 мВ$ $\Delta\varphi_{Cl} = -91 мВ$.

Тут прийнято T = 300 К. Як бачимо, у випадку пасивного транспорту калію і хлору реалізується необхідна різниця потенціалів. Для натрію ситуація протилежна - потрібен активний транспорт. Відмінність від експериментальної величини мембранного потенціалу можна пояснити необхідністю одночасного врахування всіх трьох потоків іонів (рівняння Гольдмана).

2.5. Біологічну мембрану можна розглядати як конденсатор. Провідникові пластини конденсатора утворюють електроліти зовнішнього та внутрішнього розчинів (позаклітинного і цитоплазми). Провідники розділені ліпідним бішаром з діелектричною проникністю $\epsilon \ll$

2. Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{l},$$

де S - площа, l - відстань між пластинами конденсатора. Відповідно, питома ємність (на одиницю площі) є **Спит.** = $\epsilon_0 \epsilon / l$. Звідси знаходимо:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{l},$$

Після підстановки конкретних значень отримуємо 1 ~ 3,5 нм.

2.6. Вважаємо, що клітина має сферичну геометрію. Тоді площа мембрани $S = 4\pi r^2 = 4\pi * 10^{-10} м^2$. Відповідно, електроємність мембрани: **C = Спит.S**. Представляючи мембрану як конденсатор, можна знайти заряд на поверхні мембрани: $|q| = C|\Delta\varphi|$. Таким чином, число іонів, які перейшли з цитоплазми у некліткове середовище є

$$\Delta n = \frac{q}{F} = \frac{4\pi r^2 C_{\text{спит}} |\Delta\varphi|}{F}.$$

Після підстановки, отримуємо $\Delta n \approx 1,17 \times 10^{-18}$ моль-іонів. У перерахунку на одиницю об'єму клітини отримуємо

$$\Delta c = \frac{\Delta n}{V} = \frac{3C_{\text{спит}} |\Delta\varphi|}{Fr} \approx 2,8 * 10^{-3} \text{ моль} / \text{м}^3 = 2,8 * 10^{-3} \text{ ммоль} / \text{л}.$$

Порівняння з характерними концентраціями іонів всередині клітини показує, що зміна концентрації вкрай мало і становить десятитисячний і менш частку відсотка.

2.7 Згідно формулі Борна, витрати енергії, необхідні для проникнення іона в ліпідний шар мембрани визначаються як

$$W_i = \frac{Z^2 e^2}{2a\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_s} - \frac{1}{\epsilon_e} \right),$$

де Ze - заряд іона. Підстановка конкретних значень дає:

$$W_i = \frac{1,6^2 * 10^{-38}}{2 * 10^{-10} * 8,85 * 10^{-12}} \left[\frac{1}{2} - 1/81 \right] * 6 * 10^{23} \text{ л} / \text{Дж} / \text{моль}.$$

Таким чином, $W_{iF} = 4200$ кДж / моль у випадку одновалентного іона. Зазначимо, що енергія дуже значна.

2.8 Витрати енергії, необхідні для проникнення Іонофори в ліпідний шар мембрани визначаються як

$$W_{IF} = \frac{Z^2 e^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r b} + \frac{Z^2 e^2}{2\epsilon_0 \epsilon_k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right),$$

де Ze - заряд іона. У разі $Z = 1$ підстановка конкретних значень дає:

$$W_F = \left(\frac{1,6 \times 10}{2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^{-9}} + \frac{1,6 \times 10}{2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 60} \right) (10^{10} - 10^9) \times 6 \times 10 \text{ Дж/моль.}$$

Таким чином, $W_p = 325$ кДж / моль у випадку одновалентного іона. при $P(x) = P_{\max}$.

2.9 Витрати енергії, необхідні для проникнення іона в ліпідний шар мембрани через пору визначаються як де Ze - заряд іона, $P(x)$ - функція, що досягає максимального значення $P_{\max} = 0,25$. У разі $Z = 1$ підстановка конкретних значень дає:

$$W_p = \left(\frac{1,6^2 \times 10^{-38}}{2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 80 \times 10^{-10}} + \frac{1,6^2 \times 10^{-38}}{8,85 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^{-9}} \right) \times 0,25 \times 6 \times 10^{23} \text{ Дж/моль.}$$

Таким чином, $W_p = 325$ кДж / моль у випадку одновалентного іона при $P(x) = P_{\max}$.

2.13. Динамічні рівняння моделі Дещяревського мають вигляд:

$$\frac{dn}{dt} = k_1(n_0 - n - m) - \frac{v}{L}n = P(n, m),$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{v}{L}n - k_2m = Q(n, m),$$

де n_0 - повне число активних ТММ-виступів, v - швидкість відносного переміщення ниток, L - відстань між двома сусідніми активними центрами актину, k_1 і k_2 - константи. При рівномірному ковзанні $v = \text{const}$. Використовуємо стандартний аналіз, як і в завданнях 1.8 - 1.13. А саме, стаціонарна точка на фазовій площині (n, m) визначається з умови $P(\bar{n}, \bar{m}) = Q(\bar{n}, \bar{m}) = 0$:

$$\bar{n} = \frac{n_0}{1 + \frac{v}{Lk_2} + \frac{v}{Lk_1}}, \quad \bar{m} = \frac{v}{Lk_2} \cdot \bar{n}.$$

Насправді, зважаючи на лінійний характеру функцій P і Q , знання точних значень n і m не обов'язкове, але треба бути впевненим, що така точка існує. Знаходимо p і q :

$$p = k_1 + k_2 + (v/L), \quad q = (v/L)(k_1 + k_2) + k_1k_2.$$

Таким чином, маємо стійку стаціонарну точку. Чи буде це стійкий фокус або стійкий вузол, залежить від співвідношення між параметрами моделі (необхідно порівняти вирази $p^2/4$ і q).

2.14 За визначенням, робота $W = \mathbf{P}\mathbf{V}t$, де \mathbf{P} - сила (навантаження на м'яз), \mathbf{V} - швидкість (ізотонічного скорочення), t - час. Для вирішення завдання необхідно використовувати рівняння Хілла:

$$(\mathbf{P} + a)\mathbf{V} = b(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}).$$

Тут \mathbf{P}_0 - максимальна напруга, що розвивається м'язом, а b - константи. Висловлюємо звідси \mathbf{P} , і вираз для роботи приймає вид

$$W = bPt \frac{P_0 - P}{P + a}.$$

Точка максимуму W визначається шляхом диференціювання, що приводить до умови:

$$P_{\max} = \sqrt{a(a + P_0)} - a.$$

Про константу a відомо, що вона приймає значення в інтервалі $0,25 + 0,4 P_0$. Без втрати спільності, виберемо нижню межу. Тоді $P_{\max} (0, 31P_0)$.

.2.15 Силу містка визначаємо як максимальну напругу, що припадає на 1 місток:

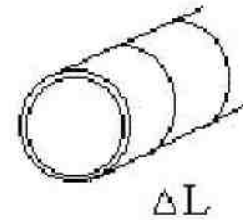
Позитивна робота, що здійснюється в циклі замикання і розмикання містка, є звичайна механічна робота. Енергію для такого циклу поставляє розщеплювана молекула АТФ.

Можна оцінити, що довжина зони дорівнює

$$L \approx \frac{\varepsilon}{f} = 10^{-8} \text{ м.}$$

Час одного циклу $L \approx \frac{\varepsilon}{f} = 10^{-8} \text{ м.}$

2.16. В разі малої провідності стінки цілком правдоподібні оцінки опору можна отримати, подумки замінюючи довге безперервне волокно нескінченної системою коротких осередків, кожний з яких містить по два дискретних елементи: "поздовжній" опір серцевини волокна і "поперечний" опір витoku через мембрану. Розрахунок вхідного опору такий "нескінченних сходів" є досить стандартна задача схемотехніки. Її основна ідея полягає в тому, що відкидання першої ланки "нескінченних сходів" не змінює її електричних властивостей, у тому числі і вхідного опору. Таким чином, такі "сходи" можуть бути представлені еквівалентною схемою, яка містить одну тільки першу ланку і замінюється вся решта резистором з опором, рівним шуканому вхідному. Подумки розіб'ємо циліндр на нескінченну систему кілець з товщиною, що прагне до нуля :



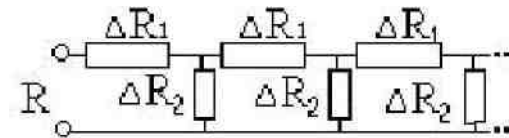
За визначенням, опір R визначається як $R = \rho L / S$, де ρ - питомий опір, і S - площа. Таким чином, "поздовжнє" опір серцевини такого кільця дається виразом

$$\Delta R_1 = \rho \frac{\Delta L}{\pi r^2},$$

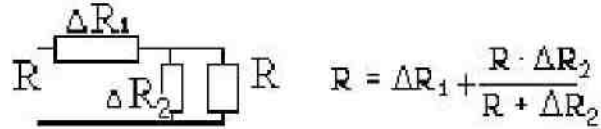
а "поперечний" опір витoku - виразом:

$$\Delta R_2 = \rho_0 \frac{h}{2\pi r \Delta L}.$$

Еквівалентна електрична схема всього волокна має вигляд нескінченного ланцюжка, що містить однакові ланки:



Заміна такого ланцюжка на ще більш просту еквівалентну схему дозволяє отримати рівняння для вхідного опору:



Очевидно, що з двох коренів рівняння фізичний зміст має тільки позитивний:

$$R = \Delta R_1 / 2 + \sqrt{(\Delta R_1 / 2)^2 + \Delta R_1 \Delta R_2}.$$

Спрямовуючи до нуля довжину ланки ланцюжка, знаходимо вхідний опір волокна і впадаючий до нього струм:

$$R = \sqrt{\rho \rho_0 \frac{h}{2\pi^2 r^3}}, \quad I = U \sqrt{\frac{2\pi^2 r^3}{\rho \rho_0 h}}.$$

Тепер нескладно зробити оцінки:

$$R \approx \gg 3,75 \text{ кОм}, \quad I \approx 10,6 \text{ мА}.$$

3.1 Потенціал Леннарда-Джонса має наступний вигляд:

$$U = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}.$$

Мінімально можлива відстань визначаємо як точку мінімуму даного потенціалу. У точці екстремуму похідна функції звертається в нуль. Після диференціювання отримуємо

$$r_0 = \left(\frac{2B}{A} \right)^{1/6}.$$

Відповідно, енергія має значення

$$U(r_0) = -\frac{A^2}{4B}.$$

Конкретні значення пропонується розрахувати самостійно.
3.2 Перш за все необхідно привести розрахункові формули до зручного для використання виду. Енергія орієнтаційної (диполь-дипольного) взаємодії визначена як

$$U_{\text{оп}} = -\frac{2P_1^2 P_2^2}{3(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{k_B T R^6},$$

де P_1 , і P_2 - дипольні моменти молекул, R - відстань між молекулами, T - температура, k_B - постійна Больцмана, ϵ_0 - електрична постійна (діелектрична проникність вакууму). Для ефективного використання таблиць зручно виразити дипольний момент в дебай (D), а відстань у нанометрах, і співвіднести енергію на моль речовини. Враховуючи, що $1 \text{ D} = 10^{-18} \text{ СГС} = 3,34 \times 10^{-30} \text{ Кл м}$, можна отримати:

$$U_{\text{оп}} \approx -\frac{(P_1, D)^2 (P_2, D)^2}{1025 (R, \text{нм})^6} [\text{кДж/моль}].$$

Тут використано значення кімнатної температури $T \gg 300 \text{ К}$. Розглянемо формулу для індукційного (диполь - індукований диполь) взаємодії:

$$U_{\text{инд}} = -\frac{P_1^2 \alpha_2}{2\pi\epsilon_0 R^6},$$

де P_1 - постійний дипольний момент молекули 1, а α_2 - поляризованість молекули 2. Величину енергії взаємодії можна оцінити як

$$U_{\text{инд}} \approx - \frac{(P_1, D)^2 (\alpha_2, 10^{-24} \text{ см}^3)}{8,3 \times 10^3 (R, \text{ нм})^6} \quad [\text{кДж/моль}].$$

Енергія дисперсійного взаємодії може бути розрахована за формулою Лондона:

$$U_{\text{дисп}} = - \frac{3I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R^6}.$$

Тут I_1 і I_2 - потенціали іонізації двох молекул. Як приклад розглянемо взаємодію між молекулами NH_3 і CO_2 Отримуємо

$$U_{\text{оп}} = 0, U_{\text{инд}} \approx - \frac{1,47^2 \times 2,65}{8,3 \times 10^3 \times 0,3^6} \approx -0,94 \text{ кДж/моль}, U_{\text{дисп}} = -11,37 \text{ кДж/моль}.$$

В останньому випадку враховано співвідношення $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Аналогічним чином розраховуються всі інші випадки взаємодій між різними молекулами

3.3 Вважаємо, що при повній денатурації білок набуває форми статистичного клубка. Вихідний обсяг α - спіралі визначається як обсяг циліндра, тобто $V_a = \pi h d^2 / 4$, де h - висота циліндра, і d - діаметр. З урахуванням умови завдання, $V_a = 42,8 \text{ нм}^3$. Припустимо, що крок α - спіралі становить 1 нм . У цьому випадку мається $n = 45$ витків, і лінійна довжина білка становить величину $L = \pi d n = 155,5$

нм. Середній радіус клубка визначається як, $R = \ell \sqrt{N}$. де ℓ - довжина статистичного сегменту, і N - число сегментів. Число сегментів $\epsilon N = L / \ell$. Таким

чином, отримуємо $R = 5\sqrt{31} \approx 8 \text{ нм}$. Відповідно, обсяг клубка $R = 5\sqrt{31} \approx 8 \text{ нм}^3$. Таким чином, обсяг помітно зростає.

3.4 Довжину статистичного сегмента (1) приймемо рівному середній персистентній довжині молекули ДНК, тобто близько 60 нм . Число сегментів $N = L / \ell$, де L - довжина молекули ДНК. Знаходимо,

що $N = 71,6 \times 10^4$. Отже, $R = \ell \sqrt{N} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. Таким чином, обсяг клубка становив би $R = \ell \sqrt{N} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. Як відомо, середній обсяг клітини людини дорівнює $R = \ell \sqrt{N} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^3$. Таким чином, розмір клубка ДНК перевищив би розмір клітини, тобто щільна упаковка ДНК в хромосоми обов'язкове!

3.5. Є 4 типи нуклеотидів ДНК і 20 типів амінокислотних залишків у білка. Отже

$$I_{\text{ДНК}} = \log_2 4^n = 2n \text{ (бит)}; \quad I_B = \log_2 20^m = m \log_2 20 \text{ (бит)}$$

Підстановка конкретних значень n і m не становить труднощів. Пропонується зробити це самостійно.

3.6 Число можливих способів розміщення клітин $\epsilon W = 10^{13}$. Таким чином,

$$I = \log_2 (10^{13}!) \cong 10^{13} \log_2 10^{13} \approx 4 \times 10^{14} \text{ бит},$$

$$\Delta S = -k_B I \approx 4 \times 10^{-9} \text{ Дж/К}.$$

.....

V Додаток

Таблица 1 Параметри (12,6) потенціала Леннарда-Джонса.

АТОМЫ	$A \cdot 10^6 \frac{\text{кДж}}{\text{МОЛЬ} \cdot \text{нм}^6}$	$B \cdot 10^9 \frac{\text{кДж}}{\text{МОЛЬ} \cdot \text{нм}^{12}}$
НН	197,4	18,9
СС	1554,0	1201,2
NN	1524,6	676,2
00	1541,4	609,0
СО	1541,4	861,0
CN	1537,2	907,2
сн	537,6	159,6
NO	1533,0	642,6
НО	520,8	105,0
НН	525,0	113,4

Таблица 2 Потенциалы (энергии) ионизации I_1 .

Молекулы	I_1 , эВ	Молекулы	I_1 , эВ
Н₂	15,4	Н₂O	12,6
CH ₂	11,8	NH₃	11,1
CH	11,1	NO₂	11,0
HI	13,4	СгНб	12,8
СбН ₆	9,6	CH ₄	14,4
CO	14,1	Cl	13,0
CO₂	14,4	He	24,6

N₂	15,8	Ag	15,8
NO	9,5	F	17,4
0 ₂	12,5	K	4,3
OH	13,2	Ca	6,1
НВг	13,2	Na	5,1
HC1	13,8	Mg	7,6
CHCl ₃	11,5	I	10,4

Таблица 3 Дипольні моменти і поляризуємість молекул.

молекулы	P, D	$a, 10^{-24} \text{см}^3$
Н₂		0,79
N₂	0	1,76
CO₂	0	2,65
CO	0,1	1,95
HF	1,91	0,51
HC1	1,08	2,63
HBr	0,80	3,61
HI	0,42	5,45
H ₂ O	1,85	1,48

NH_3	1,47	2,21
CCl_4	-	10,11
CHCl_3	1,01	-
CH_2Cl_2	1,57	6,48
CH_3Cl	1,87	8,23
CH_4	-	2,60
CH_3OH	1,71	3,23
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	1,68	-
C_6H_6	-	10,32
$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$	0,36	-
He	-	0,20
Ar	-	1,60

Деякі корисні константи

Діелектрична проникність вакууму.. $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Ф / м}$

Заряд електрона $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл}$

Постійна Больцмана $K_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж / К}$

Постійна Авогадро $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

Універсальна газова стала $R = 8,31 \text{ Дж / (кмоль)}$

Постійна Фарадея $F = 96485 \text{ Кл / моль}$

ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

- [ВАН України](#). Паспорт спеціальності.
- [Українська радянська енциклопедія](#). У 12-ти томах. / За ред. [М. Бажана](#). — 2-ге вид. — К., 1974—1985.
- *Андреев Ю. Н., Дзюбенко М. С.* Физика в современной медицине. Л., 1953;
- *Воронцов Д. С.* Раздражительность и возбуждение как общие свойства живых образований. «Научные записки научно-исследовательского института физиологии тварин КДУ», 1947, т. 2, в. 2:
- *Лазарев П. П.* Современные проблемы биофизики. М.—Л., 1945;
- *Чаговец В. Ю.* Избранные труды. К., 1957.
- *Биофизика. Медицинская физика. Теоретическая и прикладная биофизика.* www.all-fizika.com/article/index.ph...
- *Літнарів Р.М.* Фізика з основами геофізики. Курс лекцій. МЕНУ, Рівне, 2007.-78 с. <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/2877>.
- *Літнарів Р.М.* Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 1. МЕНУ, Рівне, 2007.-44с. <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/2881>
- *Літнарів Р.М.* Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 2. МЕНУ, Рівне, 2008.-48с. <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/2884>
- *Літнарів Р.М.* Біофізика. Медична фізика, теоретична і прикладна Фізика. Курс лекцій. МЕНУ, Рівне, 2011.- 205 с. <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/17160>.
- *Осипов В.А.* Сборник задач по биофизике. http://lrb.jinr.ru/kafedra/html/for_students/files/osipov_sbornik_zadach.pdf.

Руслан Миколайович Літнарівч
кандидат технічних наук, доцент

БІОФІЗИКА

Медична фізика , теоретична і прикладна фізика
Збірник задач

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

**Комп'ютерний набір, верстка, редагування
і макетування та дизайн в редакторі
Microsoft® Office® Word 2003
Р.М.Літнарівч**

**Відповідальний редактор Й.В. Джунь
Підп.до друку 11. 12. 2010 р.**

**Формат 60x84/16. Папір офсетн.№1.
Гарнітура Times New Roman.**

Друк різнограф. Тираж 300 пр.

Редакційно-видавничий центр «Тетіс»

Міжнародного економіко-гуманітарного університету

Імені академіка Степана Дем'янчука

33027 Рівне , Україна

Вул..С.Дем'янчука, 4, корпус 1

Телефон : (+00380) 362 23 – 73 – 09

Факс :(+00380) 362 23 – 01 – 86

E-mail:mail@regi.rovno.ua